L2 MTH1314 2016-2017

Correction du devoir maison n ° 1

Solution de l'exercice 1

Voici une expression possible pour chacune des affirmations :

$A.$ $\exists x \in F, \quad \forall y \in H, \quad M(x,y).$
Il existe une femme qui est mariée avec tous les hommes *à la fois.*

$B.$ $\forall y \in H, \quad \exists x \in F, \quad M(x,y).$
Tous les hommes sont mariés avec au moins une femme.

Ces deux propositions ne sont pas équivalentes. L'affirmation A implique l'affirmation B puisque si une femme est mariée avec tous les hommes, tous les hommes sont mariés avec cette femme (symétrie de la relation) et notamment tous les hommes sont mariés. Cependant en toute généralité, l'affirmation B n'implique pas l'affirmation A puisque chaque homme peut être marié à une femme différente (c'est courant dans la vie).

Pour la négation n'oubliez pas de nier aussi l'affirmation $M(x,y)$. Notons $\neg M(x,y)$ la négation de « x est marié(e) avec y » c'est-à-dire l'affirmation « x n'est pas marié(e) avec y ». Alors A et B se nient de la façon suivante :

$$A.\ \forall x \in F, \quad \exists y \in H, \quad \neg M(x,y).$$
$$B.\ \exists y \in H, \quad \forall x \in F, \quad \neg M(x,y).$$

Ce qui peut donner en français,

$A.$ Pour toute femme, on peut trouver un homme qui n'est pas marié avec cette femme.

$B.$ Il existe un homme célibataire, c'est-à-dire qui n'est marié avec aucune femme.

Solution de l'exercice 2

Question 1. J'ai rencontré beaucoup trop d'inexactitudes dans cette question. Beaucoup d'entre vous n'ont pas vérifié pour l'élément neutre par exemple à faire sa multiplication à gauche **ET** à droite. L'élément $e \in G$ est neutre si pour tout $x \in G$, $e * x = \mathbf{x} * \mathbf{e} = e$. C'est une erreur à ne pas commettre surtout lorsque l'énoncé vous demande de vérifier que G n'est pas commutatif ! De plus dans votre rédaction, ce n'est pas toujours clair si vous procéder par équivalence totale ou par analyse-synthèse. Beaucoup d'entre vous ont oublié la synthèse.

La loi $*$ est une loi de composition interne. En effet, soit (x,y) et (a,b) deux éléments de G. Alors par définition de G, $x \neq 0$ et $a \neq 0$. Donc le produit $xa \neq 0$. De plus puisque x, y, a et b sont des réels avec $a \neq 0$, l'élément $xb + \frac{y}{a}$ existe et appartient bien à $\mathbb{R}$. Donc le couple $(xa, xb + \frac{y}{a}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = G$. Ceci étant vrai pour n'importe quel couple d'éléments de G (couple de couple donc) on conclut que $*$ est une loi de composition interne dans G.

Vérifions que $*$ est associative sur G. Soient (x,y), (a,b) et (u,v) trois éléments de G. On a

$$\begin{aligned}(x,y) * [(a,b) * (u,v)] &= (x,y) * \left(au, av + \frac{b}{v}\right) \\ &= \left(xau, x\left(av + \frac{b}{v}\right) + \frac{y}{au}\right) = \left(xau, xav + \frac{xb}{v} + \frac{y}{au}\right).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}[(x,y)*(a,b)]*(u,v) &= \left(xa, xb+\frac{y}{a}\right)*(u,v)\\ &= \left(xau, xav+\frac{xb+\frac{y}{a}}{u}\right) = \left(xau, xav+\frac{xb}{u}+\frac{y}{au}\right).\end{aligned}$$

Donc pour tout $((x,y),(a,b),(u,v))\in G^3$,

$$(x,y)*[(a,b)*(u,v)] = [(x,y)*(a,b)]*(u,v)$$

et la loi $*$ est bien associative sur G.

Recherche de l'élément neutre. Je vous mets ici pas une, ni deux mais trois rédactions possibles pour justifier l'existence d'un élément neutre.

1) Considérons l'élément $(1,0)$ qui est dans G puisque $1\neq 0$. Pour tout $(x,y)\in G$, on note que

$$(x,y)*(1,0) = \left(x\times 1, x\times 0+\frac{y}{1}\right) = (x,y).$$

De même

$$(1,0)*(x,y) = \left(1\times x, 1\times y+\frac{0}{x}\right) = (x,y).$$

Donc $(1,0)$ est l'élément neutre de G. Méthode rapide et efficace, elle n'est pas ma préférée puisque l'élément neutre $(1,0)$ est parachuté. Elle requiert en fait d'effectuer la méthode 2) ou 3) qui suit au brouillon.

2) Par analyse-synthèse. On cherche un *candidat* au poste d'élément neutre. Soit $(e_1,e_2)\in G$. On suppose que (e_1,e_2) est l'élément neutre de G et cherchons les valeurs possibles (s'il y en a) pour e_1 et pour e_2. Puisque (e_1,e_2) est neutre alors (juste une conséquence pas d'équivalence ici)

$$\forall (x,y)\in G,\quad (x,y)*(e_1,e_2) = (x,y).$$

Un conseil éviter de mettre par ci des implications et par là des équivalences. Dans un raisonnement d'analyse-synthèse, c'est par double implication que l'on procède. On favorise le « donc ».

Donc

$$\begin{aligned}&\forall (x,y)\in G,\quad \left(xe_1, xe_2+\frac{y}{e_1}\right) = (x,y)\\ \Rightarrow\quad &\forall (x,y)\in G,\quad \begin{cases} xe_1 = x\\ xe_2+\dfrac{y}{e_1} = y\end{cases}\end{aligned}$$

Puisque $x\neq 0$ on en déduit que

$$\begin{cases} & e_1 = 1\\ \forall (x,y)\in G, & xe_2+y = y\end{cases}$$

A nouveau $x\neq 0$ et donc $e_2 = 0$. L'unique candidat pour être l'élément neutre est $(1,0)$. Il nous reste à faire la synthèse ce qui est exactement la méthode 1, je ne le refais pas.

3) Par équivalence successive. Soit $(e_1, e_2) \in G$. On dit que (e_1, e_2) est l'élément neutre de G si et seulement si

$$
\begin{aligned}
& \forall (x,y) \in G, \quad \begin{cases} (x,y) * (e_1, e_2) = (x,y) \\ (e_1, e_2) * (x,y) = (x,y) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall (x,y) \in G, \quad \begin{cases} \left(xe_1, xe_2 + \dfrac{y}{e_1}\right) = (x,y) \\ \left(e_1 x, e_1 y + \dfrac{e_2}{x}\right) = (x,y) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall (x,y) \in G, \quad \begin{cases} xe_1 = e_1 x = x \\ xe_2 + \dfrac{y}{e_1} = e_1 y + \dfrac{e_2}{x} = y \end{cases}
\end{aligned}
$$

Comme $x \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \forall (x,y) \in G, \quad \begin{cases} e_1 = 1 \\ xe_2 + y = y + \dfrac{e_2}{x} = y \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \begin{cases} e_1 = 1 \\ xe_2 = \dfrac{e_2}{x} = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Il existe donc un (unique) élément neutre pour G qui est $(1, 0)$.

Recherche de l'inverse. Je vais raisonner ici par analyse-synthèse. Soit (x, y) un élément de G. Cherchons à montrer qu'il est inversible en trouvant son inverse.

Analyse. Supposons (x, y) inversible et notons (a, b) son inverse. Alors

$$
\begin{aligned}
& (x,y) * (a,b) = \left(xa, xb + \frac{y}{a}\right) = (1,0) \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} xa = 1 \\ xb + \dfrac{y}{a} = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} a = \dfrac{1}{x} & \text{car } x \neq 0 \\ xb + xy = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} a = \dfrac{1}{x}, \\ b = -y & \text{car } x \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc $(a, b) = \left(\frac{1}{x}, -y\right)$.

Synthèse. Rappelons que $(x, y) \in G$ a été précédemment fixé. Vérifions que le couple $\left(\frac{1}{x}, -y\right)$ est son inverse. Tout d'abord $\left(\frac{1}{x}, -y\right)$ est dans G puisque $\frac{1}{x} \neq 0$. Puis on a

$$
(x,y) * \left(\frac{1}{x}, -y\right) = \left(\frac{x}{x}, -xy + \frac{y}{\frac{1}{x}}\right) = (1,0)
$$

et

$$
\left(\frac{1}{x}, -y\right) * (x,y) = \left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x} + \frac{-y}{x}\right) = (1,0).
$$

Donc (x, y) est inversible dans G d'inverse $\left(\frac{1}{x}, -y\right)$. Ceci étant vrai pour n'importe quel élément de G, on en déduit que tous les éléments sont inversibles.

La loi $*$ est une loi de composition interne pour G, associative sur G. L'ensemble G possède un élément neutre et tous les éléments sont inversibles et donc G est un groupe.

Le groupe $(G, *)$ **est non commutatif.** Très peu d'entre vous ont réussi cette question. Il ne suffit pas d'affirmer que $xb + \frac{y}{a} \neq ay + \frac{b}{x}$, ceci est faux je peux vous trouver des couples pour lesquels on a égalité (n'importe quels couples $(x, 0)$ et $(a, 0)$ par exemple). Les éléments $(1, 1)$ et $(2, 1)$ sont dans G mais ne commutent pas. En effet,

$$(1,1) * (2,1) = \left(2, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$$

et

$$(2,1) * (1,1) = (2, 2+1) = (2,3) \neq (1,1) * (2,1).$$

Donc le groupe G n'est pas commutatif.

Question 2. Question facile mais c'est dommage vous avez tous refait le calcul alors que par la question précédente on sait déjà la formule de l'inverse. Soit $(x, y) \in G$.

$$(3,4) * (x,y) = (3,6) \Leftrightarrow (x,y) = (3,4)^{-1} * (3,6) = \left(\frac{1}{3}, -4\right) * (3,6) = \left(1, 2 - \frac{4}{3}\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right).$$

L'unique solution est donc $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

Question 3. On note que $0 \notin]0; +\infty[$ et donc $(1, 0) \notin H_1$. Le sous-ensemble H_1 ne contient pas l'élément neutre de G et n'est donc pas un sous-groupe de G.

Pour H_2 cette fois-ci il contient l'élément neutre. Cependant il n'est pas *toujours* stable par passage à l'inverse. Beaucoup d'entre vous m'ont marqué que si $(x, y) \in H_2$ alors $(x, y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -y\right)$ car puisque $y \in [0, +\infty[$ alors $-y < 0$. Ceci est faux !!! En effet si $y = 0$ alors l'inverse de (x, y) est bien dans H_2. Il fallait prendre $y > 0$. Mais rien ne vaut un exemple concret puisque il suffit de trouver UN élément dissonant pour que H_2 ne soit pas un sous-groupe. Considérons $(1, 1)$ qui est bien un élément de H_2. Par la question 1, son inverse dans G est $(1, -1)$. Or $-1 \notin \mathbb{R}_+$ donc $(1, 1)^{-1} \notin H_2$ qui n'est donc pas stable par passage à l'inverse. H_2 n'est pas un sous-groupe de G.

Montrons que H_3 est un sous-groupe de G. $H_3 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est bien un sous-ensemble de G. Il contient l'élément neutre $(1, 0) \in H_3$. Il est stable par action de $*$. Soient (x, y) et (a, b) dans H_3. Alors $x > 0$ et $a > 0$ donc $xa > 0$ et on a toujours $xb + \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$. Donc $(x, y) * (a, b) \in H_3$. H_3 est aussi stable par passage à l'inverse. Si $(x, y) \in H_3$ alors $x > 0$ donc $\frac{1}{x} > 0$. On a toujours $-y \in \mathbb{R}$ et donc $(x, y)^{-1} \in H_3$. Ainsi H_3 est un sous-groupe de G.

Montrons que H_4 est un sous-groupe de G. Il est inclus dans G et contient l'élément neutre. Il est stable sous l'action de $*$. Soient (x, y) et (a, b) dans H_4 alors $x = \pm 1$ et $a = \pm 1$ donc $xa = \pm 1$ et on a $xb + \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$. Donc $(x, y) * (a, b) \in H_4$. H_4 est stable par passage à l'inverse. Si $(x, y) \in H_4$ alors $x = \pm 1$ donc $\frac{1}{x} = \pm 1$. On a toujours $-y \in \mathbb{R}$ et donc $(x, y)^{-1} \in H_4$. Ainsi H_4 est un sous-groupe de G.

Montrons que H_5 est un sous-groupe de G. Il est inclus dans G et contient l'élément neutre. Il est stable sous l'action de $*$. Soient (x, y) et (a, b) dans H_5. Puisque $\mathbb{Q}$ est un corps que $x \neq 0$ et $a \neq 0$ alors $xa \in \mathbb{Q}^*$ et $xb + \frac{y}{a} \in \mathbb{Q}$. Donc $(x, y) * (a, b) \in H_5$. H_5 est stable par passage à l'inverse. Si $(x, y) \in H_5$ alors $x \in \mathbb{Q}^*$ donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}^*$ et $-y \in \mathbb{Q}$. Finalement H_5 est un sous-groupe de G.

Question 4. L'ensemble H_α est inclus dans G puisque la première composante du couple est toujours non nulle. Il contient l'élément neutre de G puisque si $x = 1 \neq 0$ alors

$$H_\alpha \ni \left(x, \alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = (1, \alpha(1-1)) = (1, 0).$$

Montrons que H_α est stable par action de $*$. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^*$. Alors,

$$\left(x, \alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) * \left(y, \alpha\left(y - \frac{1}{y}\right)\right) = \left(xy, x\alpha\left(y - \frac{1}{y}\right) + \frac{\alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)}{y}\right).$$

Pour montrer que ce nouvel élément est dans H_α, il faut montrer qu'il peut s'écrire comme $\left(u, \alpha\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)$ avec $u \neq 0$. On écrit donc

$$\left(x, \alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) * \left(y, \alpha\left(y - \frac{1}{y}\right)\right) = \left(xy, \alpha\left(xy - \frac{x}{y} + \frac{x}{y} - \frac{1}{xy}\right)\right) = \left(xy, \alpha\left(xy - \frac{1}{xy}\right)\right).$$

Or $u = xy \neq 0$ car $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Donc $\left(x, \alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) * \left(y, \alpha\left(y - \frac{1}{y}\right)\right) \in H_\alpha$. Ceci étant vrai pour tout x et y dans $\mathbb{R}^*$, on en déduit que H_α est stable sous l'action de $*$.

Montrons que H_α est stable par passage à l'inverse. Soit $x \neq 0$, alors

$$\left(x, \alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \left(\frac{1}{x}, \alpha\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)\right).$$

Or $\frac{1}{x} \neq 0$ donc on a écrit l'inverse comme $\left(u, \alpha\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)$ avec $u \neq 0$. D'où $\left(x, \alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)^{-1} \in H_\alpha$ et H_α est stable par passage à l'inverse.

Conclusion H_α est un sous-groupe de G.

Solution de l'exercice 3

Question 1. On veut montrer l'égalité de deux ensembles donc il faut montrer que $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset G$ et que $G \subset \{y_1, \ldots, y_n\}$. En fait ici les cardinaux étant finis ici, il suffit de montrer que l'un des ensembles est inclus dans l'autre et qu'ils possèdent le même cardinal pour conclure qu'ils sont égaux

Montrons que $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset G$. Notez que par définition $\mathrm{Im}\,(\gamma_a) = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Montrer que $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset G$ revient donc à montrer que γ_a est bien définie. Soit $i \in \{1, \ldots n\}$, puisque $x_i \in G$, $a \in G$ et que G est un groupe, alors $ax_i \in G$ donc $y_i = \gamma_a(x_i) \in G$, pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$.

On sait par définition de G est de cardinal n. Montrons que $\{y_1, \ldots, y_n\}$ possède exactement n éléments c'est-à-dire qu'il n'y a aucune redondance et que les y_i sont deux à deux distincts. Cela revient donc à montrer que l'application γ_a n'a pas deux images identiques id est qu'elle est injective. Soient $i \neq j$. Supposons $y_i = y_j$ alors $ax_i = ay_i$. En composant par a^{-1}, on obtient que $x_i = x_j$. Or les x_i sont supposés distincts car G est de cardinal n. Donc cela est contradictoire. Donc si $i \neq j$ alors $y_i \neq y_j$ et l'ensemble $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est de cardinal n, le même que celui de G. Dans une autre formulation on peut aussi dire que γ_a est injective de G dans G. Or G est de cardinal fini et donc on sait dans ce cas que nécessairement γ_a est bijective et donc surjective et ainsi $\mathrm{Im}\,(\gamma_a) = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Conclusion $\{y_1, \ldots, y_n\} = G$.

Question 2. Trop facile. Puisque $\{y_1, \ldots, y_n\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, nécessairement le produit des éléments est le même (notez que la notation $\prod$ n'est valide que puisque l'on se moque de l'ordre de multiplication des éléments car G est commutatif)

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} y_i = \prod_{i=1}^{n} (a \cdot x_i).$$

Question 3. Puisque la question était facile, j'attendais une rédaction particulièrement détaillée. Le groupe G est commutatif donc,

$$\prod_{i=1}^{n} (a \cdot x_i) = a^n \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Par la question 2,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = a^n \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

On compose de chaque côté par $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}$ qui existe car G est un groupe et l'on trouve que

$$a^n = e,$$

où e est l'élément neutre du groupe. En réalité ce résultat est vrai pour tout groupe (même s'il n'est pas commutatif).